Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Propriedade Forte de Markov

Tempo de parada (TP)

Uma va $T \geq 0$ é dita um *tempo de parada* para (X_t) se o evento $\{T \leq t\}$ depender apenas de $(X_s)_{s \leq t}$ para todo t.

Teorema 1 (Propriedade Forte de Markov)

Seja $(X_t) \sim \text{PMS}(\mu, \mathbf{Q})$ e T um TP para (X_t).

Então, dados $\{T < \infty\}$ e $\{X_T = x, (X_s)_{s<T}\}$,

$(X_{T+t})_{t \geq 0} \sim \text{PMS}(\delta_x, \mathbf{Q})$, independentemente de $(X_s)_{s<T}$.

Equações de Kolmogorov

Dada uma Q-matriz* $\mathbf{Q} = (q_{xy})_{x,y\in\mathcal{S}}$, sejam os seguintes sistemas de equações diferenciais: para $x, y \in \mathcal{S}$:

Equações avançadas

$$\begin{cases} P'_{xy}(t) = \sum_{z\in\mathcal{S}} P_{xz}(t) q_{zy}, \\ P_{xy}(0) = \delta_{xy}; \end{cases} \tag{1}$$

Equações atrasadas

$$\begin{cases} P'_{xy}(t) = \sum_{z\in\mathcal{S}} q_{xz} P_{zy}(t), \\ P_{xy}(0) = \delta_{xy}. \end{cases} \tag{2}$$

Veremos a seguir que/como as probabilidades de transição do PMS associado a $\mathbf{Q}$ satisfazem essas equações.

*Vide Slide 2 do Álbum 13.

Equações de Kolmogorov

Seja (X_t) o PMS (mínimo) associado a $\mathbf{Q}$ construído no Álbum 13, e seja $P_{xy}(t) = \mathbb{P}_x(X_t = y)$, $x, y \in \mathcal{S}$.

Teorema 1

Suponha que $\mathcal{S}$ seja *finito*. Então

(a) Para $t, h > 0$, dado $X_t = x$, X_{t+h} é independente de $(X_s)_{s \leq t}$ e quando $h \downarrow 0$, uniformemente em t

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = y \,|\, X_t = x) = \delta_{xy} + q_{xy} h + o(h);$$

(b) $(P_{xy}(t),\ t \geq 0)_{x,y \in \mathcal{S}}$ satisfaz o sistema de eqs avançadas (1).

Teorema 2

Em geral ($\mathcal{S}$ enumerável), $(P_{xy}(t),\ t \geq 0)_{x,y \in \mathcal{S}}$ satisfaz o sistema de equações atrasadas (2).

Dem. do Teorema 1

(a) Temos

$$\mathbb{P}_x(X_h = x) \overset{(3)}{\geq} \mathbb{P}_x(T_1 > h) = e^{-q_x h} = 1 + q_{xx} + o(h)$$

e para $y \neq x$

$$\mathbb{P}_x(X_h = y) \overset{(4)}{\geq} \mathbb{P}_x(T_1 <, Y_1 = y, T_2 > h) = (1 - e^{-q_x h})\pi_{xy} e^{-q_y h}$$
$$= q_{xy} + o(h).$$

Logo,

$$1 = \sum_y \mathbb{P}_x(X_h = y) \geq \overbrace{\sum_y \delta_{xy}}^{1} + \Big(\overbrace{\sum_y q_{xy}}^{0} \Big) h + o(h) = 1 + o(h),$$

e podemos concluir que as $\geq$'s em (3) e (4) são $=$'s.

Dem. do Teorema 1 (cont)

(b) Dados $x, y \in \mathcal{S}$ e $t, h > 0$:

$$P_{xy}(t+h) = \sum_z \mathbb{P}_x(X_t = z)\mathbb{P}(X_{t+h} = y | X_t = z)$$
$$\stackrel{(a)}{=} \sum_z P_{xz}(t)(\delta_{zy} + q_{zy}h + o(h))$$

Logo,

$$\frac{1}{h}(P_{xy}(t+h) - P_{xy}(t)) = \sum_z P_{xz}(t)q_{zy} + \frac{o(h)}{h};$$

segue que

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(P_{xy}(t+h) - P_{xy}(t)) = \sum_z P_{xz}(t)q_{zy}.$$

Podemos repetir o argumento com $P_{xy}(t)$ e $P_{xy}(t-h)$, e obter

$$P'_{xy}(t) = \sum_z P_{xz}(t)q_{zy}. \qquad \square$$

Dem. do Teorema 2

Para $x, y \in \mathcal{S}$, dado T_1:

$$P_{xy}(t) = \mathbb{P}_x(X_t = y | T_1 > t) e^{-q_x t} + \int_0^t ds\, q_x e^{-q_x s} \sum_{z \neq x} \pi_{xz} P_{zy}(t-s)$$

$$= \delta_{xy} e^{-q_x t} + \int_0^t ds\, e^{-q_x s} \sum_{z \neq x} q_{xz} P_{zy}(t-s)$$

Logo,

$$e^{q_x t} P_{xy}(t) = \delta_{xy} + \int_0^t ds \sum_{z \neq x} q_{xz}\, e^{q_x s} P_{zy}(s), \tag{3}$$

o que mostra que $P_{xy}(t)$ é contínua e diferenciável (pois a série no integrando é uniformemente convergente, e logo uma função contínua).

Diferenciando os dois lados de (3):

$$q_x e^{q_x t} P_{xy}(t) + e^{q_x t} P'_{xy}(t) = \sum_{z \neq x} q_{xz}\, e^{q_x t} P_{zy}(t),$$

e logo, cancelando $e^{q_x t}$ nos dois lados, e como $q_x = -q_{xx}$:

$$P'_{xy}(t) = \sum_z q_{xz} P_{zy}(t) \qquad \square$$

Obs. 1

Sobre a importante questão da unicidade das soluções dos sistemas de equações avançadas e atrasadas:

(a) Para $\mathcal{S}$ finito, sabe-se que os dois sistemas têm uma única (e mesma) solução, que então fornece as probabilidades de transição no tempo t.

(b) Se $\mathcal{S}$ for infinito, então o sistema atrasado pode ter mais do que uma solução; isso corresponde à explosividade do PMS. Em todo caso, as probabilidades de transição no tempo t são a solução não negativa *mínima* do sistema atrasado.

(c) Seja (Z_t) um processo de saltos com a mesma distribuição inicial que (X_t), mesmas taxas de salto que (X_t), e mesmas probabilidades de transição da cadeia de saltos entre estados de $\mathcal{S}$ que (X_t). Seja ζ a primeira vez que (Z_t) dá um número infinito de saltos em tempo finito, e façamos $(Z_{\zeta+t})_{t\geq 0} \sim (X_t)$. Então (Z_t) satisfaz as equações atrasadas; note que a demonstração do Teorema 2 acima funciona para (Z_t); note ainda que, se $\mathbb{P}(\zeta < \infty) > 0$, então (Z_t) tem mais oportunidades de visitar determinado estado de $\mathcal{S}$ no tempo t (antes ou depois de ζ) que (X_t) (que só pode fazê-lo antes de ζ). Segue que $\mathbb{P}_x(Z_t = y) \geq \mathbb{P}_x(X_t = y)\ \forall\ x, y \in \mathcal{S}$, e $\exists\ x_0, y_0 \in \mathcal{S}$ e $t_0 > 0$ tais que $\mathbb{P}_{x_0}(Z_{t_0} = y_0) > \mathbb{P}_{x_0}(X_{t_0} = y_0)$.

(d) A solução não negativa *mínima* do sistema atrasado também é a solução não negativa *mínima* do sistema avançado.

Obs. 2

Usando a notação matricial $\mathbf{P}(t) = (P_{xy}(t))_{x,y\in\mathcal{S}}$, $t \geq 0$, temos que as equações de Kolmogorov podem ser escritas:

Equações avançadas

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q},\ t \geq 0;\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$$

Equações atrasadas

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t),\ t \geq 0;\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$$

(a) Informalmente (por similaridade com o caso escalar), temos que

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t},\ t \geq 0, \tag{4}$$

soluciona ambas equações. Se $\mathcal{S}$ for finito, pode-se fazer sentido do lado direito de (4) e verificar a igualdade.

(b) Se $\mathcal{S}$ for finito, $\mathbf{P} := \mathbf{P}(1) = e^{\mathbf{Q}}$ é uma matriz estocástica. Logo, se entendermos (4) como "$\mathbf{P}^t$ "(informalmente!), então podemos ver $\mathbf{P}(t)$ como a "$t^{\underline{a}}$"potência de $\mathbf{P}$, analogamente ao caso discreto.

Exemplo 1. Processo de Nascimento Linear: $q_x = \lambda x,\ x \in \mathbb{N}$

Vamos resolver as equações avançadas

$$\begin{cases} P'_{xx}(t) = -\lambda x P_{xx}(t), & \text{se } x \geq 0 \qquad (5) \\ P'_{xy}(t) = -\lambda y P_{xy}(t) + \lambda(y-1)P_{x,y-1}(t), & \text{se } y > x \geq 0 \qquad (6) \\ P_{xy}(0) = \delta_{xy}, & x, y \in \mathbb{N}. \qquad (7) \end{cases}$$

Obs. Apesar de $\mathcal{S}$ ser infinito, o sistema de equações acima é uma recursão finita. Analiticamente, tudo se passa como se $\mathcal{S}$ fosse finito.

Para $x \geq 1$, de (5):

$$(P'_{xx}(t) + \lambda x P_{xx}(t))e^{\lambda x t} = (P_{xx}(t)e^{\lambda x t})' = 0 \Rightarrow P_{xx}(t)e^{\lambda x t} \equiv \text{const} \overset{(7)}{=} 1,$$

e logo
$$P_{xx}(t) = e^{-\lambda x t},\ t \geq 0,\ x \geq 1. \tag{8}$$

De (6), para $y > x \geq 1$:

$$(P'_{xy}(t) + \lambda y P_{xy}(t))e^{\lambda y t} = (P_{xy}(t)e^{\lambda y t})' = \lambda(y-1)e^{\lambda t}(P_{x,y-1}(t)e^{\lambda(y-1)t})$$

$$\Rightarrow R'_{xy}(t) = (y-1)e^{t}R_{x,y-1}(t), \tag{9}$$

onde $R_{xy}(t) \equiv P_{xy}(t/\lambda)e^{yt}$. Note que $R_{xx}(t) \equiv 1$ e $R_{xy}(0) = \delta_{xy}$.

Exemplo 1 (cont.)

Fazendo $S_{xy}(\tau) = R_{xy}(\log \tau)$, $\tau \geq 1$, temos que

$$S'_{xy}(\tau) = (y-1)S_{x,y-1}(\tau),\ S_{xx}(\tau) \equiv 1 \text{ e } S_{xy}(1) = \delta_{xy}. \tag{10}$$

Integrando e iterando:

$$S_{xy}(\tau) = (y-1)\int_1^\tau S_{x,y-1}(s)\,ds = (y-1)(y-2)\int_1^\tau \int_1^s S_{x,y-2}(u)\,du$$
$$= \cdots = (y-1)\cdots(y-x)\int_{1<s_\ell<\cdots<s_1<\tau} d_{s_\ell}\cdots d_{s_1},\ \ell = y-x. \tag{11}$$

A última integral vale $\int_{0<s_\ell<\cdots<s_1<\tau-1} d_{s_\ell}\cdots d_{s_1} = \frac{1}{\ell!}(\tau-1)^\ell$.

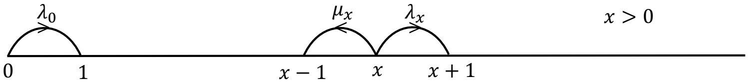
Do exposto acima, segue que

$$P_{xy}(t) = e^{-\lambda yt}R_{xy}(\lambda t) = e^{-\lambda yt}S_{xy}(e^{\lambda t}) = \binom{y-1}{x-1}e^{-\lambda yt}(e^{\lambda t}-1)^{y-x}$$
$$= \binom{y-1}{x-1}e^{-\lambda xt}(1-e^{-\lambda t})^{y-x},\ t \geq 0. \tag{12}$$

Podemos então dizer que, sob $\mathbb{P}_x$, $X_t - x$ tem distr Binomial Negativa com parâmetros x e $e^{-\lambda t}$. Em particular, sob $\mathbb{P}_1$, $X_t - 1$ é uma v.a. Geométrica com parâmetro $e^{-\lambda t}$.

Exemplo 2. Processo de Nascimento e Morte

Seja (X_t) o PNM com taxas estritamente positivas.



Em vez de considerar as probabilidades de transição em tempo t, vamos analisar *tempos até obtermos avanços unitários*, definidos logo mais. O método de análise *não* serão as equações de Kolmogorov, mas sim a utilização da PFM, como no caso do PAS em $\mathbb{Z}$, no Álbum 4.

Suponha que $X_0 = 0$ e definamos $H_0 = 0$ e para $x \geq 1$

$$H_x = \inf\{t \geq 0 : X_t = x\}.$$

Seja $\tau_x = H_{x+1} - H_x$, $x \geq 0$. Queremos achar $\mathbb{E}(\tau_x)$, $x \in \mathbb{N}$.

Como $\tau_0 = T_1 \sim \text{Exp}(\lambda_0)$, temos que $\mathbb{E}(\tau_0) = 1/\lambda_0$.

Para $x \geq 1$, a distr de τ_x é mais complicada, mas podemos usar a PFM. (Além disso, vamos usar, sem demonstrar[†], que $\mathbb{E}(\tau_x) < \infty$ $\forall x$.)

[†] mas não é difícil

Tempos de chegada no PNM (cont)

Para $x \geq 1$, façamos

$$\tilde{H}_x = \inf\{t \geq H_x : X_t \neq x\} \text{ e } \quad I_x = \mathbb{1}\{X_{\tilde{H}_x} = x-1\}.$$

Em $\{I_x = 0\}$, $\tau_x = \tilde{H}_x - H_x$.

Em $\{I_x = 1\}$, $\tau_x = \tilde{H}_x - H_x + \tilde{\tau}_{x-1} + \tilde{\tau}_x$, onde

$$\tilde{\tau}_{x-1} = \inf\{t \geq \tilde{H}_x : X_t = x\} - \tilde{H}_x \overset{\text{PFM}}{\sim} \tau_{x-1}, \text{ e} \tag{13a}$$

$$\tilde{\tau}_x = \inf\{t \geq \tilde{H}_x + \tilde{\tau}_{x-1} : X_t = x+1\} - \tilde{H}_x - \tilde{\tau}_{x-1} \overset{\text{PFM}}{\sim} \tau_x. \tag{13b}$$

Logo, $\quad \tau_x = \tilde{H}_x - H_x + (\tilde{\tau}_{x-1} + \tilde{\tau}_x) I_x. \qquad (14)$

Segue disso, da PFM, e do seguinte:

$$\tilde{H}_x - H_x \sim \text{Exp}(\mu_x + \lambda_x), \tag{15}$$

que $\quad \mathbb{E}(\tau_x) = \frac{1}{\mu_x+\lambda_x} + \frac{\mu_x}{\mu_x+\lambda_x}(\mathbb{E}(\tau_{x-1}) + \mathbb{E}(\tau_x))$; logo,

$$\frac{\lambda_x}{\mu_x+\lambda_x}\mathbb{E}(\tau_x) = \frac{1}{\mu_x+\lambda_x} + \frac{\mu_x}{\mu_x+\lambda_x}\mathbb{E}(\tau_{x-1})$$

$$\Rightarrow \lambda_x \mathbb{E}(\tau_x) =: a_x = 1 + b_x a_{x-1}, \tag{16}$$

onde $b_x = \mu_x / \lambda_{x-1}$.

Tempos de chegada no PNM (cont)

Iterando (16), vem

$$a_x = 1 + b_x + b_x b_{x-1} a_{x-2} = \cdots = 1 + \sum_{y=1}^{x} \prod_{z=y}^{x} b_z = 1 + \sum_{y=1}^{x} \prod_{z=y}^{x} \frac{\mu_z}{\lambda_{z-1}}.$$

Logo,

$$\mathbb{E}(\tau_x) = \frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_x} \sum_{y=1}^{x} \prod_{z=y}^{x} \frac{\mu_z}{\lambda_{z-1}}.$$

Então, usando a PFM mais uma vez, se $0 \leq x < y$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x(H_y) = \mathbb{E}_0(H_y) - \mathbb{E}_0(H_x) &= \sum_{w=x}^{y-1} \mathbb{E}(\tau_w) \\ &= \sum_{w=x}^{y-1} \frac{1}{\lambda_w} + \sum_{w=x}^{y-1} \frac{1}{\lambda_w} \sum_{v=1}^{w} \prod_{z=v}^{w} \frac{\mu_z}{\lambda_{z-1}}. \end{aligned}$$

Ex. Fila M/M/1: $\mu_x \equiv \mu$, $\lambda_x \equiv \lambda$; para $x \geq 0$:

$$\mathbb{E}(\tau_x) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{y=1}^{x} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{x-y+1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{\ell=0}^{x} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\ell} = \begin{cases} \frac{x+1}{\lambda}, & \text{se } \mu = \lambda; \\ \frac{1-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{x+1}}{\lambda-\mu}, & \text{se } \mu \neq \lambda. \end{cases}$$

Fila M/M/1 — $\mathbb{E}_0(H_y)$, $y \geq 1$

Se $\mu = \lambda$, então $\mathbb{E}_0(H_y) = \sum_{w=0}^{y-1} \frac{w+1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{v=1}^{y} v = \frac{y(y+1)}{2\lambda} \approx y^2$,

onde $\approx$ indica a ordem de magnitude como função de y, para y bastante grande, a menos de constante multiplicativa[‡].

Se $\mu \neq \lambda$, então $\mathbb{E}_0(H_y) =$

$$\sum_{w=0}^{y-1} \frac{1-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{w+1}}{\lambda-\mu} = \frac{1}{\lambda-\mu}\left[y - \sum_{v=1}^{y}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{v}\right] \approx \begin{cases} y, & \text{se } \mu < \lambda; \\ \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{y}, & \text{se } \mu > \lambda. \end{cases}$$

Obs. Os comportamentos são bastante distintos dependendo se há simetria (crescimento *quadrático* em y), ou se a assimetria é à esquerda (crescimento *linear* em y), ou à direita (crescimento *exponencial* em y).

Pode-se verificar que esses comportamentos correspondem, resp., a recorrência nula, recorrência positiva, e transitoriedade do processo.

[‡] mais precisamente, indica que o limite do quociente dos lados esquerdo e direito quando $y \to \infty$ é uma constante $\in (0, \infty)$

Variância de τ_x

O caso $x = 0$ é mais simples e temos $\mathbb{V}(\tau_0) = \frac{1}{\lambda_0^2}$.

Para $x \geq 1$, vamos usar a identidade, válida para duas va's X e Y,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}[\mathbb{E}(X|Y)] + \mathbb{E}[\mathbb{V}(X|Y)], \text{ com } X = \tau_x \text{ e } Y = I_x.^{\S} \tag{17}$$

De (13-15), temos:

I) $\mathbb{E}(\tau_x|I_x) = \frac{1}{\mu_x+\lambda_x} + f_x I_x$, onde $f_x = \mathbb{E}(\tau_{x-1}) + \mathbb{E}(\tau_x)$;

segue que $\quad \mathbb{V}[\mathbb{E}(\tau_x|I_x)] = f_x^2 \mathbb{V}(I_x) = f_x^2 \frac{\mu_x \lambda_x}{(\mu_x+\lambda_x)^2}$; (18)

II) $\mathbb{V}(\tau_x|I_x) = \frac{1}{(\mu_x+\lambda_x)^2} + (v_{x-1} + v_x)I_x$, onde $v_x = \mathbb{V}(\tau_x)$;

e logo $\quad \mathbb{E}[\mathbb{V}(\tau_x|I_x)] = \frac{1}{(\mu_x+\lambda_x)^2} + \frac{\mu_x}{\mu_x+\lambda_x}(v_{x-1} + v_x)$. (19)

De (17-19): $v_x = \frac{A_x}{(\mu_x+\lambda_x)^2} + \frac{\mu_x}{\mu_x+\lambda_x}(v_{x-1} + v_x)$, onde $A_x = \mu_x \lambda_x f_x^2 + 1$.

---

§ É preciso supor que $\mathbb{E}(\tau_x^2) < \infty$, $x \geq 0$, mas, de novo, isto não é difícil de verificar.

$\mathbb{V}(\tau_x)$ (cont.)

Logo, $\frac{\lambda_x}{\mu_x+\lambda_x} v_x = \frac{A_x}{(\mu_x+\lambda_x)^2} + \frac{\mu_x}{\mu_x+\lambda_x} v_{x-1}$,

e chegamos a

$$\lambda_x v_x =: w_x = c_x + b_x w_{x-1}, \tag{20}$$

onde b_x é como acima (vide (16)) e $c_x = \frac{A_x}{\mu_x+\lambda_x}$.

Iterando (20), analogamente à abordagem adotada para calcular $\mathbb{E}(\tau_x)$ anteriormente, chegamos a uma expressão para $\mathbb{V}(\tau_x)$.

De novo usando a mesma abordagem de antes, podemos obter expressões para $\mathbb{V}_x(H_y)$, a variância de H_y sob $\mathbb{P}_x$, para $0 \leq x < y$.